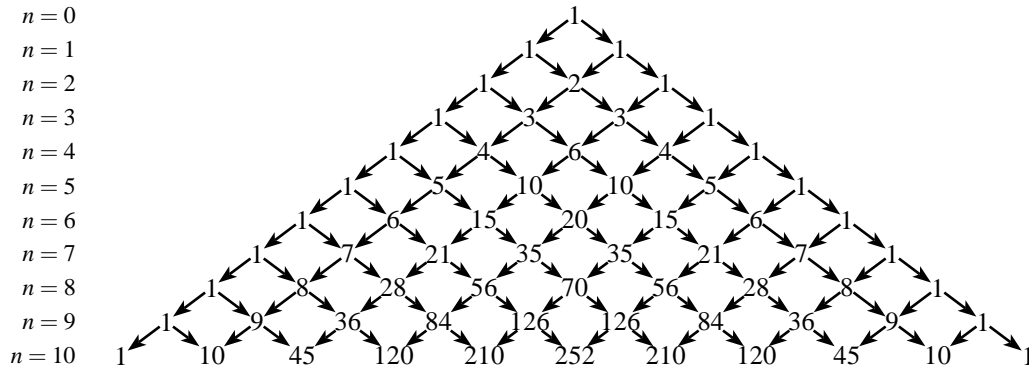


Das Pascalsche Dreieck

Das Pascalsche Dreieck enthält die Binomialkoeffizienten. Sie sind im Dreieck derart angeordnet, dass ein Eintrag die Summe der zwei darüberstehenden Einträge ist. So ist z.B. $\binom{4}{2} = 6$, da in der vierten Zeile an der zweiten Stelle eine 6 steht. Es ist dabei zu beachten, dass die Einsen am Anfang die Stelle Null darstellen.



Das Pascalsche Dreieck gibt eine Handhabe, schnell beliebige Potenzen von Binomen auszumultiplizieren. So finden sich in der dritten Zeile die Koeffizienten der ersten beiden Binomischen Formeln:

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2 \cdot a \cdot b + b^2$$

In der nächsten Zeile finden sich die Koeffizienten für $(a \pm b)^3$:

$$\begin{aligned} (a^1 \pm b^1)^3 &= 1 \cdot a^3 b^0 \pm 3 \cdot a^2 \cdot b^1 + 3 \cdot a^1 \cdot b^2 \pm 1 \cdot a^0 b^3 \\ &= a^3 \pm 3a^2 b + 3ab^2 \pm b^3. \end{aligned}$$

Diese Auflistung kann beliebig fortgesetzt werden, wobei zu beachten ist, dass für das Binom $(a - b)$ stets das Minuszeichen aus \pm zu nehmen ist, und dass, während der Exponent von a in jeder Formel stets um 1 abnimmt, der Exponent von b um 1 zunimmt.

Dies führt zum **Binomischen Lehrsatz** mit dem man die Potenzen eines Binoms allgemein ausrechnen kann. Er lautet:

$$(a + b)^n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} a^{n-i} b^i$$

Beispiel

Die binomische Formel ist ein Spezialfall des binomischen Lehrsatzes für $n = 2$:

$$\begin{aligned} (a + b)^2 &= \sum_{i=0}^2 \binom{2}{i} a^{2-i} b^i \\ &= \binom{2}{0} a^{2-0} b^0 + \binom{2}{1} a^{2-1} b^1 + \binom{2}{2} a^{2-2} b^2 \\ &= \binom{2}{0} a^2 + \binom{2}{1} a^1 b^1 + \binom{2}{2} b^2 \\ &= a^2 + 2a^1 b^1 + b^2 \end{aligned}$$

Betrachtet man das Pascalsche Dreieck, so erkennt man eine Symmetrie entlang der Mittellinie. Es ist z.B. $\binom{10}{3} = 120$ sowie $\binom{10}{7} = 120$. Also ist $\binom{10}{3} = \binom{10}{7} = \binom{10}{10-3} = \binom{10}{10-7}$. Es gilt allgemein, $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$. Somit muss man das Pascalsche Dreieck nicht komplett aufzeichnen, sondern es reicht eine Hälfte.

Bitte wenden...



