Das Pascalsche Dreieck

Das Pascalsche Dreieck enthält die Binomialkoeffizienten. Sie sind im Dreieck derart angeordnet, dass ein Eintrag die Summe der zwei darüberstehenden Einträge ist. So ist z.B. $\binom{4}{2} = 6$, da in der vierten Zeile an der zweiten Stelle eine 6 steht. Es ist dabei zu beachten, dass die Einsen am Anfang die Stelle Null darstellen.

$n = 0$	1
$n = 1$	1 1
$n = 2$	1 2 1
$n = 3$	1 3 3 1
$n = 4$	1 4 6 4 1
$n = 5$	1 5 10 10 5 1
$n = 6$	1 6 15 20 15 6 1
$n = 7$	1 7 21 35 35 21 7 1
$n = 8$	1 8 28 56 70 56 28 8 1
$n = 9$	1 9 36 84 126 126 84 36 9 1
$n = 10$	1 10 45 120 210 252 210 120 45 10 1

Das Pascalsche Dreieck gibt eine Handhabe, schnell beliebige Potenzen von Binomen auszumultiplizieren. So finden sich in der dritten Zeile die Koeffizienten der ersten beiden Binomischen Formeln:

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2 \cdot a \cdot b + b^2$$

In der nächsten Zeile finden sich die Koeffizienten für $(a \pm b)^3$:

$$\begin{aligned}(a^1 \pm b^1)^3 &= 1 \cdot a^3 b^0 \pm 3 \cdot a^2 \cdot b^1 + 3 \cdot a^1 \cdot b^2 \pm 1 \cdot a^0 b^3 \\ &= a^3 \pm 3a^2 b + 3ab^2 \pm b^3.\end{aligned}$$

Diese Auflistung kann beliebig fortgesetzt werden, wobei zu beachten ist, dass für das Binom $(a - b)$ stets das Minuszeichen aus $\pm$ zu nehmen ist, und dass, während der Exponent von a in jeder Formel stets um 1 abnimmt, der Exponent von b um 1 zunimmt.

Dies führt zum **Binomischen Lehrsatz** mit dem man die Potenzen eines Binoms allgemein ausrechnen kann. Er lautet:

$$(a + b)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^{n-i} b^i$$

Beispiel

Die binomische Formel ist ein Spezialfall des binomischen Lehrsatzes für $n = 2$:

$$\begin{aligned}(a+b)^2 &= \sum_{i=0}^{2} \tbinom{2}{i} a^{2-i} b^i \\ &= \tbinom{2}{0} a^{2-0} b^0 + \tbinom{2}{1} a^{2-1} b^1 + \tbinom{2}{2} a^{2-2} b^2 \\ &= \tbinom{2}{0} a^2 + \tbinom{2}{1} a^1 b^1 + \tbinom{2}{2} b^2 \\ &= a^2 + 2a^1 b^1 + b^2\end{aligned}$$

Betrachtet man das Pascalsche Dreieck, so erkennt man eine Symmetrie entlang der Mittellinie. Es ist z.B. $\binom{10}{3} = 120$ sowie $\binom{10}{7} = 120$. Also ist $\binom{10}{3} = \binom{10}{7} = \binom{10}{10-3} = \binom{10}{10-7}$.
Es gilt allgemein, $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$. Somit muss man das Pascalsche Dreieck nicht komplett aufzeichnen, sondern es reicht eine Hälfte.

Bitte wenden...

Rendtel, 06.10.2011 - mb_pascal.tex

Das Pascalsche Dreieck

Im Folgenden ist das Pascalsche Dreieck bis zur Tiefe 25 abgedruckt.

$n = 0$	1												
$n = 1$	1												
$n = 2$	1	2											
$n = 3$	1	3											
$n = 4$	1	4	6										
$n = 5$	1	5	10										
$n = 6$	1	6	15	20									
$n = 7$	1	7	21	35									
$n = 8$	1	8	28	56	70								
$n = 9$	1	9	36	84	126								
$n = 10$	1	10	45	120	210	252							
$n = 11$	1	11	55	165	330	462							
$n = 12$	1	12	66	220	495	792	924						
$n = 13$	1	13	78	286	715	1287	1716						
$n = 14$	1	14	91	364	1001	2002	3003	3432					
$n = 15$	1	15	105	455	1365	3003	5005	6435					
$n = 16$	1	16	120	560	1820	4368	8008	11440	12870				
$n = 17$	1	17	136	680	2380	6188	12376	19448	24310				
$n = 18$	1	18	153	816	3060	8568	18564	31824	43758	48620			
$n = 19$	1	19	171	969	3876	11628	27132	50388	75582	92378			
$n = 20$	1	20	190	1140	4845	15504	38760	77520	125970	167960	184756		
$n = 21$	1	21	210	1330	5985	20349	54264	116280	203490	293930	352716		
$n = 22$	1	22	231	1540	7315	26334	74613	170544	319770	497420	646646	705432	
$n = 23$	1	23	253	1771	8855	33649	100947	245157	490314	817190	1144066	1352078	
$n = 24$	1	24	276	2024	10626	42504	134596	346104	735471	1307504	1961256	2496144	2704156
$n = 25$	1	25	300	2300	12650	53130	177100	480700	1081575	2042975	3268760	4457400	5200300